数列极限与函数极限补充习题 (解答)

宗语轩[1]

数列极限:

1. 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 及 $\alpha > 1$, 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

提示. 类比证明 $\alpha = 1$ 时该数列发散的方法证明 $\alpha > 1$ 时该数列收敛.

证明. 易知,$\{a_n\}$ 是严格递增数列. 而

$$\begin{aligned}
a_{2^k-1} &= 1 + (\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}) + (\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{7^\alpha}) + \cdots + (\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^\alpha}) \\
&\leqslant 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^\alpha} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^2 + \cdots + (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^{k-1} \\
&= \frac{1 - (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^k}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} \\
&< \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}
\end{aligned}$$

故数列 $\{a_n\}$ 有一子列 $\{a_{2^n-1}\}$ 是有上界的. 又因为 $\{a_n\}$ 是递增数列, 由此得到 $\{a_n\}$ 有上界, 从而数列 $\{a_n\}$ 收敛. ∎

2. 设 a, b, c 是给定的三个实数, 令 $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$, 数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 满足 $\begin{cases} a_n = \dfrac{b_{n-1} + c_{n-1}}{2}, \\ b_n = \dfrac{a_{n-1} + c_{n-1}}{2}, \\ c_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}^*$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{a+b+c}{3}$.

提示. 由条件知 $a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$ 及 $a_n - b_n = (-1)^n \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$.

证明. 两式作差得 $|a_n - b_n| = \left|\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}\right| = \left|\frac{a_{n-2} - b_{n-2}}{2^2}\right| = \cdots = \left|\frac{a-b}{2^n}\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$. 同理, $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - c_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - c_n) = 0$.

[1]就读于中国科学技术大学 2019 级数学科学学院概率统计系. 讲义如有错误欢迎联系我:zyx240014@mail.ustc.edu.cn. 我的个人主页:http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/index.html

而三式相加得 $a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a+b+c$.
由 $a_n=\dfrac{(a_n+b_n+c_n)+(a_n-b_n)+(a_n-c_n)}{3}$ 可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{a+b+c}{3}$. 同理, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{a+b+c}{3}$. ∎

推广 1. 设 a,b 是给定的两个正数, 且 $a>b>0$. 令 $a_0=a,b_0=b$, 数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},n\in\mathbb{N}^*$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$.

推广 2. 设 a,b 是给定的两个正数, 且 $a>b>0$. 令 $a_0=a,b_0=b$, 数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}},b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}},n\in\mathbb{N}^*$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$. 当 $a_1=2\sqrt{3},b_1=3$ 时, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\pi$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 令 $y_n=n(x_n-x_{n-1})$. 证明: 若数列 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$.

提示. 运用 Stolz 定理.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=B$. 由 Stolz 定理知 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nx_n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}(nx_n-(n-1)x_{n-1})=A+B$. 所以 $B=0$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$. ∎

4. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}\subseteq\mathbb{N}^*$, 且满足 $a_1=b_1=1,a_{n+1}+\sqrt{3}b_{n+1}=(a_n+\sqrt{3}b_n)^2,n\in\mathbb{N}^*$. 证明: 数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ 收敛, 并求出其极限值.

提示. 由 $\{a_n\},\{b_n\}\subseteq\mathbb{N}^*$ 知 $\begin{cases}a_{n+1}=a_n^2+3b_n^2\\ b_{n+1}=2a_nb_n\end{cases}$.
令 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$, 两式作商得 $c_{n+1}=\dfrac{1}{2}(c_n+\dfrac{3}{c_n})$. 后续过程同教材习题 **1.2.18(3)**

5. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>0,a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n},n\in\mathbb{N}$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$, 并进一步证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-\sqrt{2n})=0$.

提示. 对 $a_1>0,a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 两边平方, 先证明 $a_n\xrightarrow{n\to+\infty}+\infty$，然后用 Stolz 定理.

证明. 数归可得 $a_n>0$. 对 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 两边平方, 得 $a_{n+1}^2=a_n^2+2+\dfrac{1}{a_n^2}>a_n^2+2$. 所以 $a_n^2>a_{n-1}^2+2>a_{n-2}^2+4>\cdots>a_1^2+2(n-1)\xrightarrow{n\to+\infty}+\infty$. 因此 $a_n\xrightarrow{n\to+\infty}+\infty$. 由 Stolz 定理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n^2}{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2}=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{2a_n^2})=1$. 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n-\sqrt{2n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2-2n}{a_n+\sqrt{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2-2n}{2\sqrt{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2-a_{n-1}^2-2}{2(\sqrt{2n}-\sqrt{2(n-1)})}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2a_n^2(\sqrt{2n}-\sqrt{2(n-1)})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{4a_n^2}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n}+\sqrt{2(n-1)}}{n}=0.$$ ∎

6. 设数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$, 且存在常数 k, 使得 $|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\leqslant k$ 对所有 $n\in\mathbb{N}^*$ 成立. 令 $z_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=0$.

提示. 定义法证明, 证明过程中运用截断法分头处理.

证明. $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$(留给读者思考). 故对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|x_n|<\varepsilon$.

- 若 $x_1=x_2=\cdots=x_{N_1}=0$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|z_n|\leqslant|x_{N_1+1}y_{n-N_1}|+\cdots+|x_ny_1|<k\varepsilon$.
- 若 $x_1,x_2,\ldots,x_{N_1}$ 不全为 0,$\exists N>N_1$, 当 $n>N$ 时, 有 $|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{|x_1|+\cdots+|x_{N_1}|}$.

故当 $n>2N+1$ 时,$|z_n|\leqslant\displaystyle\sum_{i=1}^{N_1}|x_iy_{n+1-i}|+\sum_{i=N_1+1}^{n}|x_iy_{n+1-i}|<\varepsilon+k\varepsilon=(k+1)\varepsilon$.

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=0$. ∎

7. 设数列 $\{a_n\}$, 满足 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

提示. 通过不等式放缩处理, 运用单调有界定理证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 当 $n>3$ 时, 有 $\sqrt{n-1}<2\sqrt{n-2}$.
故 $\sqrt{n-1+\sqrt{n}}\leqslant\sqrt{n-1+2\sqrt{n-1}+1}=\sqrt{n-1}+1\leqslant2\sqrt{n-2}+1$. 因此 $a_n\leqslant2$.
又因为 $a_{n+1}>a_n$ 由单调有界定理知数列 $\{a_n\}$ 收敛. ∎

8. 设数列 $\{S_n\}$ 满足 $S_n=(\frac{1}{n})^n+(\frac{2}{n})^n+\cdots+(\frac{n-1}{n})^n$.
(1) 证明: 数列 $\{S_n\}$ 单调递增且有界, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在;
(2) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

提示. 证明:$(\frac{k}{n})^n<(\frac{k+1}{n+1})^{n+1},k=1,2,\ldots,n-1$.

证明. (1) 对 $k=1,2,\ldots,n-1$, 由几何平均—算术平均不等式知

$$k+1>\underbrace{\frac{k}{n}+\cdots+\frac{k}{n}}_{n\text{个}}+1>(n+1)(\frac{k}{n})^{\frac{n}{n+1}}.$$

因此，有 $(\frac{k}{n})^n < (\frac{k+1}{n+1})^{n+1}, k = 1, 2, \ldots, n-1$. 于是

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (\frac{1}{n+1})^{n+1} + (\frac{2}{n+1})^{n+1} + \cdots + (\frac{n}{n+1})^{n+1} \\ &> (\frac{1}{n+1})^{n+1} + (\frac{1}{n})^n + \cdots + (\frac{n-1}{n})^n \\ &> S_n \end{aligned}$$

即数列 $\{S_n\}$ 单调递增. 利用 $(1-\frac{k}{n})^n < e^{-k}$(留给读者思考) 可知

$$S_n < \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} = \frac{1}{e}\frac{1-(\frac{1}{e})^n}{1-\frac{1}{e}} < \frac{1}{e-1}.$$

所以 $\{S_n\}$ 有界, 由单调有界定理知, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在.

(2) 记 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. 由 (1) 知 $S \leqslant \frac{1}{e-1}$. 同时对任意正整数 $n > m$, 则 $S_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{m}(1-\frac{k}{n})^n$.
利用 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{k}{n})^n = e^{-k}$. 先令 $n \to +\infty$, 再令 $m \to +\infty$, 则有 $S \geqslant \frac{1}{e-1}$.
因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S = \frac{1}{e-1}$

∎

函数极限:

1. (1) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上满足函数方程 $f(2x) = f(x)$, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限. 证明:$f(x)$ 是常值函数.
(2)a, b 是两个大于 1 的常数，函数 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $x = 0$ 的邻域内有界，并且对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $f(ax) = bf(x)$. 证明:$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

证明. (1) 反证: 设存在两个不同的正实数 x_1, x_2, 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 记 $x = \min\{x_1, x_2\}$, 取 $\varepsilon = \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{2} > 0$, 对 $\forall M > 0$, 取 $x_3 = 2^{[\log_2 \frac{M}{x}]+1}x_1, x_4 = 2^{[\log_2 \frac{M}{x}]+1}x_2$. 则有 $f(x_3) = f(x_1), f(x_4) = f(x_2), x_3, x_4 > M$, 且 $|f(x_3) - f(x_4)| = |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$. 由 Cauchy 收敛准则知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在, 矛盾.
(2) 令 $x = 0$, 可知 $f(0) = 0$. 由题意知,$\exists\, \delta, M > 0$, 当 $|x| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < M$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta' = a^{-[\log_b \frac{M}{\varepsilon}]-1}\delta$, 当 $|x| < \delta'$ 时, 有

$$f(x)=b^{-1}f(ax)=b^{-2}f(a^2x)=\cdots=b^{-n}f(a^nx)<\varepsilon(\text{其中 } n=[\log_b \tfrac{M}{\varepsilon}]+1).$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$。 ∎

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$. 证明:$f(x)=g(x)$.

证明. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期分别是 T_1 和 T_2, 于是对任意固定的实数 x, 有

$$\lim_{n\to+\infty}(f(x)-g(x+nT_1))=\lim_{n\to+\infty}(f(x+nT_1)-g(x+nT_1))=\lim_{y\to+\infty}(f(y)-g(y))=0.$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(x+nT_1)=f(x)$. 而 $g(x+nT_1)=g(x+T_2+nT_1)$, 故 $f(x)$ 也是以 T_2 为周期的周期函数. 同理, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x+nT_2)=g(x)$, 且 $g(x)$ 也是以 T_1 为周期的周期函数. 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x+nT_2)-g(x+nT_1))=\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x+nT_2+nT_1)-g(x+nT_1+nT_2))=0$, 所以 $f(x)=g(x)$. ∎

3. 证明: 当 $x\to 0$ 时, 无穷小量 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 没有阶.

提示. 考察 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x^\alpha}$ 即可. 可证得 $\alpha\geqslant 1$ 时极限不存在, $\alpha<1$ 时极限值是 0.

4. 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 且 $f(x)-f(\dfrac{x}{2})=o(x)(x\to 0)$. 证明:$f(x)=o(x)(x\to 0)$

证明. 记 $x\beta(x)=f(x)-f(\dfrac{x}{2})$. 由题意知, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x|<\delta$ 时, 有 $|\beta(x)|<\varepsilon$. 而 $f(\dfrac{x}{2^{k-1}})-f(\dfrac{x}{2^k})=\dfrac{x}{2^{k-1}}\beta(\dfrac{x}{2^{k-1}}),k=1,2,\ldots,n$. 故有

$$\left|f(x)-f(\frac{x}{2^n})\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(\frac{x}{2^{k-1}})-f(\frac{x}{2^k})\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|(\frac{x}{2^{k-1}})-f(\frac{x}{2^k})\right|<\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{2^{k-1}}\varepsilon<2|x|\varepsilon.$$

令 $n\to+\infty$, 得 $|f(x)|\leqslant 2|x|\varepsilon$. 因此 $f(x)=o(x)(x\to 0)$. ∎